Örnek: $f(x) = x_1^3 + 2x_2^3 + 4x_1^2 + x_2^2 + 20$ fonksiyonunun optimal noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right] = [3x_1^2 + 8x_1 \quad , \qquad 6x_2^2 + 2x_2]$$

$\nabla f = 0 \ ise$

$$3x_1^2 + 8x_1 = 0$$

$$6x_2^2 + 2x_2 = 0$$

ortak çözümünden bulunan kritik noktalar aşağıdaki gibidir:

$x_{01} = (x_1 \, , \ x_2 \,) = (0 \, , \ 0)$

$x_{02} = (x_1 \, , \ x_2 \,) = (0 \, , -1/3 \,)$

$x_{03} = (x_1 \, , \ x_2 \,) = (-8/3 \, , 0 \,)$

$x_{04} = (x_1 \, , \ x_2 \,) = (-8/3 \, , -1/3 \,)$

Bu kritik noktaların durumunu araştırmada kullanılacak Hessian matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} 6x_1 + 8 & 0 \\ 0 & 12x_2 + 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$\boldsymbol{x_{01} = (x_1 \, , x_2 \,) = (0 \, , 0)}$ kritik noktasındaki Hessian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Birinci esas minör: $|8| = 8$ (pozitif)

İkinci esas minör : $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$ (pozitif)

NOT1'de verilen bilgilere göre Hessian matrisi pozitif tanımlıdır. O halde $x_0 = (0 \, , 0)$ noktası yerel minimum noktadır.

$\boldsymbol{x_{02}} = (\boldsymbol{x_1}\,,\boldsymbol{x_2}\,) = (\mathbf{0}\,,-\mathbf{1/3})$ kritik noktasındaki Hessian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Birinci esas minör: $|8| = 8$ (pozitif)

İkinci esas minör : $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -16$ (negatif)

NOT1'de verilen bilgilere göre Hessian matrisi pozitif yada negatif tanımlı değildir. O halde $x_0 = (0\,,-1/3)$ noktası eyer(dönüm) noktasıdır.

$\boldsymbol{x_{03}} = (\boldsymbol{x_1}\,,\boldsymbol{x_2}\,) = (-\mathbf{8/3}\,,\mathbf{0})$ kritik noktasındaki Hessian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Birinci esas minör: $|-8| = -8$ (negatif)

İkinci esas minör : $\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -16$ (negatif)

NOT1'de verilen bilgilere göre Hessian matrisi pozitif yada negatif tanımlı değildir. O halde $x_0 = (-8/3\,,0)$ noktası eyer(dönüm) noktasıdır.

$\boldsymbol{x_{04}} = (\boldsymbol{x_1}\,,\boldsymbol{x_2}\,) = (-\mathbf{8/3}\,,-\mathbf{1/3})$ kritik noktasındaki Hessian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Birinci esas minör: $|-8| = -8$ (negatif)

İkinci esas minör : $\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 16$ (pozitif)

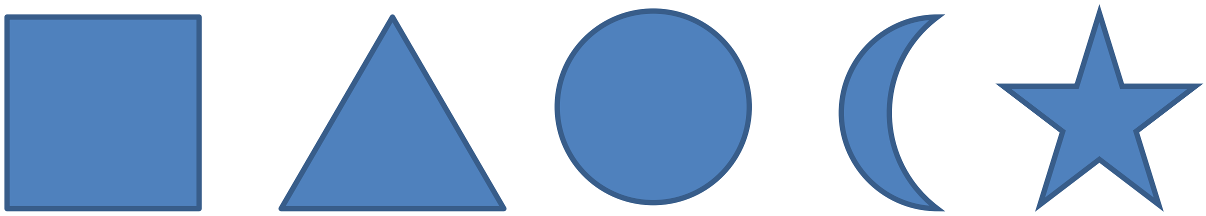
NOT1'de verilen bilgilere göre Hessian matrisi negatif tanımlıdır. O halde $x_0 = (-8/3\,,-1/3)$ noktası yerel maksimum noktadır.

Soru(ÖDEV). Aşağıdaki fonksiyonun extremum(uç) noktalarını bulunuz

$$f = f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + x_2^3 + 4x_1^2 + 2x_2^2 + 100$$

KONKAV VE KONVEKS FONKSİYONLAR

S bir küme, $x_1 \in S$ ve $x_2 \in S$ olmak üzere $0 \leq \alpha \leq 1$ için $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in S$ ise S kümesi konvekstir denir.

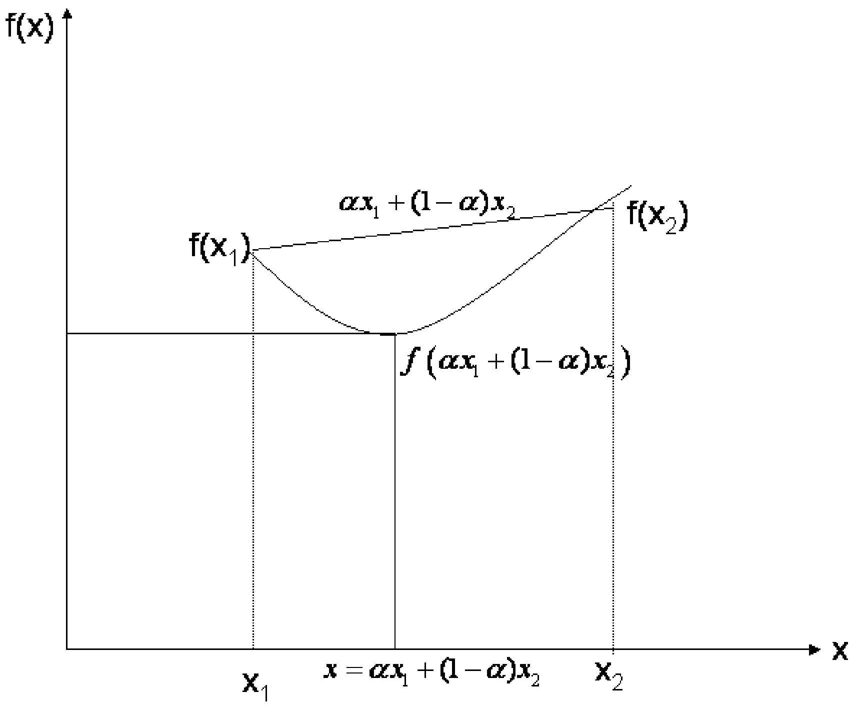


Konveks Konveks Konveks Konkav Konkav

S konveks kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu verilmiş olsun. $x_1 \in S$, $x_2 \in S$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere;

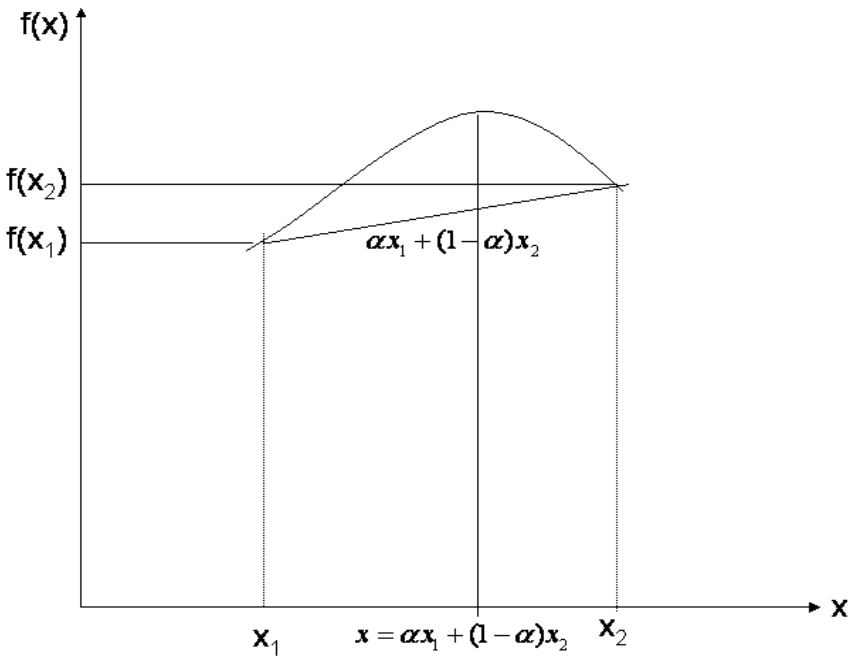
$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ ise f fonksiyonu konveks,

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ ise f fonksiyonu konkav bir fonksiyondur.



Şekil 1. Konveks fonksiyon

Şekil 1'de $f(x)$'in gösterdiği eğri üzerinde alınan farklı iki noktayı birleştiren doğru parçası, fonksiyonun üst tarafında kalıyorsa veya çakışıyorsa $f(x)$ fonksiyonu konveks bir fonksiyondur.



Şekil 2. Konkav fonksiyon

Şekil 2'de $f(x)$'in gösterdiği eğri üzerinde alınan farklı iki noktayı birleştiren doğru parçası, fonksiyonun altında kalıyorsa veya çakışıyorsa $f(x)$ fonksiyonu konkav bir fonksiyondur.

Not 1: $Min\ Z$ konveks, $Max\ Z$ konkav bir amaç fonksiyonudur.

Not 2: Bir fonksiyonun ikinci türevlerinden oluşan Hessian matrisi pozitif tanımlı ise fonksiyon konveks, Hessian matrisi negatif tanımlı ise fonksiyon konkavdır.

Örnek : $f(x) = ax^2$ fonksiyonu ;

$a > 0$ ise konveks,

$a < 0$ ise konkavdır.

Soru : Aşağıdaki fonksiyonların konkav mı yoksa konveks mi olduklarını belirtiniz.

$f(x) = 5x^2$	Konveks	$f(x) = -8x^2 - 5x$	Konkav
$f(x) = 5x^2 + 20x$	Konveks	$f(x) = (0{,}5x - 5)^2$	Konveks
$f(x) = -8x^2$	Konkav	$f(x) = -(2x + 4)^2 + 15$	Konkav